Exercice 5.8

$$\varepsilon = 10^{-3}\begin{pmatrix} 10x/x_0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 5\sqrt{3} \\ 0 & 5\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad x_0 = 2 \text{ cm} \text{ et x en cm}$$

1.- Ce tenseur correspond à un tenseur linéarisé si

Max $|\varepsilon_{ij}| \le 0.1$; NB: $10^{-3} 5\sqrt{3} = 8.66 10^{-3} = 0.866\%$

Max $|\varepsilon_{ij}| = 0.01|x/x_0| \le 0.1$ avec $x_0 = 2$ cm et x en cm

soit $|x/x_0| \le 10$. i.e. $-10x_o \le x \le 10x_o = 20$cm

Le point M doit donc se situer entre les plans x= -20 cm et x = 20 cm.

2.- Rotation du repère d'un angle θ autour de l'axe Ox : la matrice de passage vaut

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ et } \varepsilon' = P\varepsilon P^t$$

(on note que $P = R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$ ou R est la matrice de rotation d'angle θ autour de $\vec{e}_x$)

$$\varepsilon' = P\varepsilon P^t = 10^{-3}\begin{pmatrix} 10x/x_0 & 0 & 0 \\ 0 & -10c^2+10\sqrt{3}sc & 10sc + 5\sqrt{3}(c^2-s^2) \\ 0 & 10sc + 5\sqrt{3}(c^2-s^2) & -10s^2-10\sqrt{3}sc \end{pmatrix} \text{ avec } c=\cos\theta \text{ et } s=\sin\theta$$

3. -ε' devient diagonal pour l'angle de rotation θ vérifiant :

$$10sc+5\sqrt{3}(c^2-s^2) = 0 = 5\sin(2\theta) + 5\sqrt{3}\cos(2\theta), \text{ i.e. } tg(2\theta)=-\sqrt{3} \text{ soit } 2\theta = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \theta = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$$

$$\text{En prenant } \theta = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}, \text{ le tenseur devient: } \varepsilon' = 10^{-3}\begin{pmatrix} 10x/x_0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix}$$

Dans le repère (xyz) tourné de π/3 autour de $\mathbf{e}_x$, les valeurs et vecteurs propres apparaissent naturellement. Les 3 vecteurs propres sont obtenus par Re_i où les 3 e_i sont les 3 vecteurs de la base (xyz) et R est la matrice de rotation d'un angle θ ($R = P^{-1} = P^t$) autour de e_x.

4.- Conservation des 3 invariants du tenseur des déformations :

$tr(\varepsilon) = 10^{-3}(10x/x_0-10)=10^{-2}(x/x_0-1)$

$tr(\varepsilon') = 10^{-3}(10x/x_0+5-15)=10^{-2}(x/x_0-1)$

$\sum_{II} = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}+\varepsilon_{zz}\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{xz}^2 = -10^{-6}(100x/x_0 + 75) = \sum_{II}'$

$\det(\varepsilon) = 10^{-3}(10x/x_0)(-25 10^{-3})(3 10^{-3})=-75.10^{-8}(x/x_0)$

$\det(\varepsilon') = \left(10^{-2}x/x_0\right)\left(-5 10^{-3}\right)\left(-15.10^{-3}\right)=-75.10^{-8}(x/x_0)$

5. Champ de déplacement $\vec{u}(r)$ dans le repère Oxyz en supposant aucune rotation et le point origine du repère fixe :

$$\varepsilon = 10^{-3}\begin{pmatrix} 10x/x_0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 5\sqrt{3} \\ 0 & 5\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\text{grad}\vec{u} + \left(\text{grad}\vec{u}\right)^{T}\right) \text{ et rotation} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\text{grad}\vec{u} - \left(\text{grad}\vec{u}\right)^{T}\right)$$

Comme il n'y a pas de rotations, nous avons $\varepsilon = \text{gradu}$

$\vec{u}(r)$ doit vérifier: $\frac{\partial u_x}{\partial x} = 10^{-2}\frac{x}{x_0}$ soit $u_x = 10^{-2}\frac{x^2}{2x_0} + A$ car $\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0$

$\frac{\partial u_y}{\partial y} = -10^{-2}$ soit $u_y = -10^{-2}y + B(z)$ et $\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$ soit $u_z = C(y)$

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial y} = \varepsilon_{yz} = 5.10^{-3}\sqrt{3} = \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial y}$$

Ainsi: $\frac{\partial B}{\partial z} = 5.10^{-3}\sqrt{3}$ et $B = 5.10^{-3}\sqrt{3}z + B'$, $\frac{\partial C}{\partial y} = 5.10^{-3}\sqrt{3}$, $C = 5.10^{-3}\sqrt{3}y + C'$

Comme le point origine du repère est fixe, les 3 constantes sont nulles et

$$\vec{u}(r) = \begin{pmatrix} 10^{-2}\frac{x^2}{2x_0} \\ -10^{-2}y + 5.10^{-3}\sqrt{3}z \\ 5.10^{-3}\sqrt{3}y \end{pmatrix} = \frac{10^{-2}}{2}\begin{pmatrix} \frac{x^2}{x_0} \\ -2y + \sqrt{3}z \\ \sqrt{3}y \end{pmatrix}$$

NB : on vérifie qu'on retrouve bien le tenseur des petites déformations avec le gradient de u.

Exercice 5.12 tenseur des déformations exprimé dans un autre repère

Effectuer une rotation de 30 degrés autour de l'axe Ox, dans le sens trigonométrique, sur le tenseur des déformations dont les composantes dans le repère orthonormé Oxyz sont données

par $\varepsilon = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3\sqrt{3} \\ 0 & -3\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}$ en %

$$\varepsilon' = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3\sqrt{3} \\ 0 & -3\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ en } \%$$

1.-Vérifier que les 3 invariants du tenseur des déformations restent inchangés au cours de la rotation. A quoi correspondent ces nouveaux axes ?
La trace des déformations, 2%, est conservée. Idem pour le déterminant qui vaut -2 ($\%^3$). Les nouveaux axes correspondent aux directions principales.

2.- Dessiner l'ellipsoïde de Cauchy dans le nouveau système d'axes Ox'y'z'.

L'ellipsoïde de Cauchy a pour demi-axe 1+1%= 1.01, 1-1%=0.99 et 1+2%=1.02.

3.-Quelle est l'augmentation de volume au cours de la déformation du cube unitaire dont les faces sont perpendiculaires aux axes Ox, Oy et Oz ?

La trace représente la variation de volume qui est donc ici de 2%.

Même question pour un cube dont les faces sont perpendiculaires à Ox', Oy' et Oz'.

4.-Ce cube a pour coté les axes principaux le long desquels il ne subit que contraction ou expansion, 1% selon Ox', -1% selon Oy' et 2% selon Oz' soit une variation volumique de 2% (car les déformations sont petites).

Exercice 5.13 : compression entre 2 plaques

1.- Le champ de déplacement vaut : $\vec{u} = MM'\begin{pmatrix} x\text{-}x_0 \\ y\text{-}y_0 \end{pmatrix} = MM'\begin{pmatrix} \frac{x_0\Delta L}{L}\left(1\text{-}\frac{y_0}{H}\right) \\ \text{-}y_0\frac{\Delta H}{H} \end{pmatrix}$

Pour simplifier l'écriture, on omet les indices 0 et le point (x,y) non déformé subit un déplacement : $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{x\Delta L}{L}\left(1\text{-}\frac{y}{H}\right) \\ \text{-}y\frac{\Delta H}{H} \end{pmatrix}$

le tenseur gradient **L** de la déformation vaut : $L = I + \mathrm{grad}\vec{u} = \begin{pmatrix} 1+\frac{\Delta L}{L}\left(1\text{-}\frac{y}{H}\right) & \text{-}\frac{x\Delta L}{LH} \\ 0 & 1\text{-}\frac{\Delta H}{H} \end{pmatrix}$

2.- le tenseur de Cauchy-Green **B** vaut :

$$B = \left(L^t\right)L = \begin{pmatrix} 1+\frac{2\Delta L}{L}\left(1\text{-}\frac{y}{H}\right)+\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2\left(1\text{-}\frac{y}{H}\right)^2 & \text{sym} \\ \text{-}\frac{x\Delta L}{LH}\text{-}\frac{x}{H}\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2\left(1\text{-}\frac{y}{H}\right) & \left(\frac{x\Delta L}{LH}\right)^2+\left(1\text{-}\frac{\Delta H}{H}\right)^2 \end{pmatrix}$$

3.-et le tenseur de Green-Lagrange :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(B\text{-}I) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{2\Delta L}{L}\left(1\text{-}\frac{y}{H}\right)+\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2\left(1\text{-}\frac{y}{H}\right)^2 & \text{sym} \\ \text{-}\frac{x\Delta L}{LH}\text{-}\frac{x}{H}\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2\left(1\text{-}\frac{y}{H}\right) & \left(\frac{x\Delta L}{LH}\right)^2+\left(1\text{-}\frac{\Delta H}{H}\right)^2-1 \end{pmatrix}$$

4.-Pour les petites déformations, $\Delta L \ll L$ et $\Delta H \ll H$, le tenseur devient :

$$\varepsilon \approx \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{2\Delta L}{L}\left(1\text{-}\frac{y}{H}\right) & \text{sym} \\ \text{-}\frac{x\Delta L}{LH} & \text{-}\frac{2\Delta H}{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta L}{L}\left(1\text{-}\frac{y}{H}\right) & \text{sym} \\ \text{-}\frac{x\Delta L}{2LH} & \text{-}\frac{\Delta H}{H} \end{pmatrix}$$

On obtient ce résultat directement avec le tenseur linéarisé des petites déformations

$$\varepsilon_{lin} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{grad}u+\left(\mathrm{grad}u\right)^t\right) = \begin{pmatrix} \frac{\Delta L}{L}\left(1\text{-}\frac{y}{H}\right) & \text{sym} \\ \text{-}\frac{x\Delta L}{2LH} & \text{-}\frac{\Delta H}{H} \end{pmatrix}.$$

Donc pour une erreur <1% entre les tenseurs de Green Lagrange et celui des petites déformations (10% de déformation max.) $\left|\frac{\Delta L}{L}\right| \le 0.1$ et $\left|\frac{\Delta H}{H}\right| \le 0.1$